Fichier téléchargé gratuitement sur www.mongosukulu.com

IFORD

INSTITUT DE FORMATION
ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.FO.R.D)
Rattaché sur le plan académique à
l'Université de Yaoundé II

CONCOURS DE RECRUTEMENT
Avril 2008

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours A)

Durée : 4 heures
Date : 29/04/2008

Documents non autorisés
Utilisation des calculatrices autorisée

Barème indicatif

Exercice 1 : 3,0 points
Exercice 2 : 3,0 points
Exercice 3 : 2,5 points
Exercice 4 : 2,5 points
Exercice 5 : 3,0 points
Exercice 6 : 3,0 points
Exercice 7 : 3,0 points

www.mongosukulu.com = Téléchargements d'épreuves & Cours gratuits

Fichier téléchargé gratuitement sur www.mongosukulu.com

Exercice 1. (3 points)

On considère une population P ayant un taux d'accroissement naturel moyen constant r. On désigne par P_0 l'effectif de cette population à la date de la première observation t = 0.

1) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.
2) En déduire que la population P croît suivant une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3) On appelle temps de doublement d'une population le temps t tel que $P_t = 2P_0$. Calculer t.
4) Application numérique : Calculer le temps de doublement des populations dont les taux d'accroissement naturels annuels moyen sont les suivants : 0,1 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 2,7 ; 3,0 ; 3,5 et 4,0.

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite de Fibonacci (u_n) $n \in \mathbb{N}$, définie par :

$$u_0 = 0 \; ; \quad u_1 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

1) Calculer les termes de cette suite jusqu'à u_{10}.
2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1}u_{n-1} - u_n^{\,2} = (-1)^n$.
3) En déduire que deux termes consécutifs de la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$ sont toujours premiers entre eux.
4) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p$.

Exercice 3. (2,5 points)

Soit $P \in R(X)$ tel que $P = X^4 + X^2 + 1$.

1) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $R(X)$.
2) Décomposer en éléments dans $R(X)$ les fractions :

a. $F = \dfrac{2X^2 + 3}{(X^2 + X + 1)^2}$;

b. $G = \dfrac{1}{X(X^4 + X^2 + 1)}$;

c. $H = \dfrac{1}{(X^4 + X^2 + 1)^2}$.

Exercice 4. (2,5 points)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

www.mongosukulu.com = Téléchargements d'épreuves & Cours gratuits

Fichier téléchargé gratuitement sur www.mongosukulu.com

1) Soit λ un réel. Démontrer que la matrice A - λ I est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1,2\}$. I est la matrice unité.
2) Calculer (A + I)(A – 2I).
3) En déduire la matrice A^n pour $n \in N$.

Exercice 5. (3 points)

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = (x^3 - 2)^n \quad n \in N^*$.
   a. Calculer f'(x) et montrer que $(x^3 - 2)f'(x) - 3nx^2 f(x) = 0$.
   b. En déduire que l'on a :
   $(x^3 - 2)f'''(x) + 3x^2(2 - n)f''(x) + 6x(1 - 2n)f'(x) - 6nf(x) = 0$

b) On donne $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Calculer f'(x).

c) En déduire l'expression de $g(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

Exercice 6. (3 points)

On considère la suite (v_n) $n \geq 1$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier n>0.

a) Montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$ tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $v_n \leq \dfrac{2}{1 - 2u_1^2} u_n$.

c) En déduire le comportement de la suite de terme général $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$.

d) Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par : $w_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ pour tout n>0, converge vers 4.

Exercice 7. (3 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x + 4}{2x - 4}$.

a) Trouver par étude directe, les valeurs de x pour lesquelles f(x) reste comprise dans l'intervalle -1 et +1.
b) Tracer la courbe C représentative des variations de f(x) et vérifier les résultats de la question (a).
c) Vérifier que le produit des valeurs que prend f(x) pour deux valeurs quelconques de x ayant pour somme 6 est constant.

www.mongosukulu.com = Téléchargements d'épreuves & Cours gratuits